**Лек 14.Критерий устойчивости Михайлова**

Рассмотрим отдельно левую часть [характеристического уравнения](http://scask.ru/q_book_algebra.php?id=186) (6.9), которая представляет собой характеристический полином:

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_32.files/image1.gif

Подставим в этот полином чисто мнимое значение https://scask.ru/img_page/1.gif где со представляет собой угловую частоту колебаний, соответствующих чисто мнимому корню характеристического уравнения. При этом получим характеристический комплекс

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_32.files/image2.gif

где вещественная часть будет содержать четные степени https://scask.ru/img_page/2.gif:

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_32.files/image3.gif

а мнимая — нечетные степени со:

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_32.files/image4.gif

Функции https://scask.ru/img_page/3.gif представляют собой модуль и фазу (аргумент) характеристического комплекса.

Характеристический полином (6.16) не будет иметь корней в правой [полуплоскости](http://scask.ru/g_book_dmath.php?id=236), если полное приращение фазы или аргумента https://scask.ru/img_page/4.gif при изменении https://scask.ru/img_page/5.gif от 0 до https://scask.ru/img_page/6.gif равно https://scask.ru/img_page/7.gif где https://scask.ru/img_page/8.gif — [степень полинома](http://scask.ru/q_lect_alg.php?id=31) https://scask.ru/img_page/9.gif Следовательно, система регулирования будет устойчивой. Если полное [приращение аргумента](http://scask.ru/q_book_msh.php?id=114) https://scask.ru/img_page/10.gif окажется меньше то система неустойчива. Докажем это.

Если все коэффициенты заданы и задано определенное значение частоты https://scask.ru/img_page/11.gif то величина https://scask.ru/img_page/12.gif изобразится на [комплексной плоскости](http://scask.ru/c_book_agm.php?id=103) в виде точки

с координатами X и Y или в виде вектора, соединяющего эту точку с началом координат. Если же значение частоты со менять непрерывно от нуля до бесконечности, то [вектор](http://scask.ru/a_lect_math1.php?id=14) будет изменяться по величине и по направлению, описывая своим концом некоторую кривую (годограф), которая называется кривой Михайлова (рис. 6.5).

Практически кривая Михайлова строится по точкам, причем задаются различные значения частоты https://scask.ru/img_page/13.gif и по формулам (6.18) и (6.19) вычисляются https://scask.ru/img_page/14.gif. Результаты расчетов сводятся в таблицу, по которой и строится затем кривая.

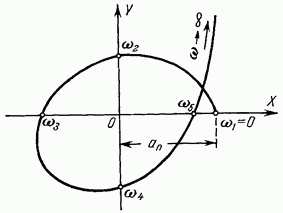


Рис. 6.5.

Выясним связь между видом кривой Михайлова и знаками вещественных корней [характеристического уравнения](http://scask.ru/q_book_algebra.php?id=186). Для этого определим, чему должен равняться угол поворота https://scask.ru/img_page/15.gif вектора https://scask.ru/img_page/16.gif при изменении со от нуля до бесконечности. Для этого запишем характеристический полином в виде произведения сомножителей

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_32.files/image6.gif

где https://scask.ru/img_page/17.gif — корни характеристического уравнения.

Характеристический [вектор](http://scask.ru/a_lect_math1.php?id=14) можно тогда представить в следующем виде:

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_32.files/image7.gif

Каждая из скобок представляет собой [комплексное число](http://scask.ru/f_book_m_cat.php?id=19). Следовательно, https://scask.ru/img_page/18.gif представляет собой произведение https://scask.ru/img_page/19.gif комплексных чисел. При перемножении аргументы комплексных чисел складываются. Поэтому результирующий угол поворота вектора https://scask.ru/img_page/20.gif при изменении со от нуля до бесконечности будет равен сумме углов поворота отдельных сомножителей (6.21):

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_32.files/image8.gif

Определим каждое слагаемое (6.22) в отдельности.

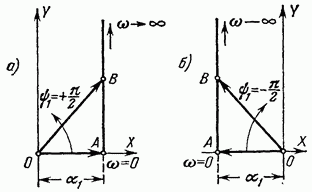


Рис. 6.6.

1. Пусть какой-либо корень, например https://scask.ru/img_page/21.gif является вещественным и отрицательным, т. е. https://scask.ru/img_page/22.gif где https://scask.ru/img_page/23.gif Сомножитель в выражении (6.21), определяемый этим корнем, будет тогда иметь вид https://scask.ru/img_page/24.gif

Построим годограф этого вектора на [комплексной плоскости](http://scask.ru/c_book_agm.php?id=103) при изменении со от нуля до бесконечности (рис. 6.6, а). При https://scask.ru/img_page/25.gif вещественная часть https://scask.ru/img_page/26.gif а мнимая https://scask.ru/img_page/27.gif Этому соответствует точка А, лежащая на оси вещественных. При https://scask.ru/img_page/28.gif [вектор](http://scask.ru/a_lect_math1.php?id=14) будет изменяться так, что его вещественная часть будет по-прежнему равна а, а мнимая часть https://scask.ru/img_page/29.gif (точка В на графике). При увеличении частоты до бесконечности конец вектора уходит в бесконечность, причем конец вектора все время остается на вертикальной прямой, проходящей через точку А, а вектор поворачивается против часовой стрелки. Результирующий угол поворота вектора https://scask.ru/img_page/30.gif.

2. Пусть теперь корень https://scask.ru/img_page/31.gif является вещественным и положительным, т. е. https://scask.ru/img_page/32.gif причем https://scask.ru/img_page/33.gif Тогда сомножитель в (6.21), определяемый этим корнем, будет иметь вид https://scask.ru/img_page/34.gif Аналогичные построения (рис. 6.6, б) показывают, что результирующий угол поворота будет https://scask.ru/img_page/35.gif Знак минус показывает, что [вектор](http://scask.ru/a_lect_math1.php?id=14) поворачивается по часовой стрелке.

3. Пусть два корня, например https://scask.ru/img_page/36.gif представляют собой комплексные сопряженные величины с отрицательной вещественной частью, т. е. https://scask.ru/img_page/37.gif Сомножители в выражении (6.21), определяемые этими корнями, будут иметь вид https://scask.ru/img_page/38.gif.

При https://scask.ru/img_page/39.gif начальные положения двух векторов определяются точками https://scask.ru/img_page/40.gif (рис. 6.7, а). Первый [вектор](http://scask.ru/a_lect_math1.php?id=14) повернут относительно оси вещественных по часовой стрелке на угол https://scask.ru/img_page/41.gif, второй вектор — на тот же угол против часовой стрелки.

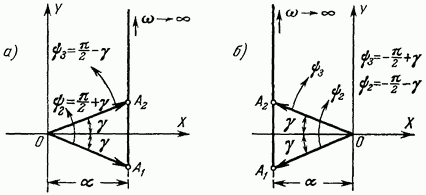


Рис. 6.7.

При увеличении https://scask.ru/img_page/42.gif от нуля до бесконечности концы обоих векторов уходят кверху в бесконечность и оба вектора в пределе сливаются с осью мнимых.

Результирующий угол поворота первого вектора https://scask.ru/img_page/43.gif Результирующий угол поворота второго вектора https://scask.ru/img_page/44.gif [Вектор](http://scask.ru/a_lect_math1.php?id=14), соответствующий произведению https://scask.ru/img_page/45.gif повернется на угол https://scask.ru/img_page/46.gif.

4. Пусть те же комплексные корни имеют положительную вещественную часть, т. е. https://scask.ru/img_page/47.gif Проводя построения, аналогичные предыдущим (рис. 6.7, б), можно получить, что результирующий угол поворота вектора, соответствующего произведению двух сомножителей, будет https://scask.ru/img_page/48.gif.

Таким образом, если [характеристическое уравнение](http://scask.ru/q_book_algebra.php?id=186) будет иметь I корней с положительной вещественной частью, то, каковы бы ни были эти корни (вещественные или комплексные), им будет соответствовать сумма углов поворотов, равная — https://scask.ru/img_page/49.gif Всем же остальным https://scask.ru/img_page/50.gif корням характеристического уравнения, имеющим отрицательные вещественные части, будет соответствовать сумма углов поворотов, равная https://scask.ru/img_page/51.gif. В результате общий угол поворота вектора https://scask.ru/img_page/52.gif при изменении https://scask.ru/img_page/53.gif от нуля до бесконечности, согласно формуле (6.22), будет

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_32.files/image11.gif

Этим выражением и определяется искомая связь между формой кривой Михайлова и знаками вещественных частей корней [характеристического уравнения](http://scask.ru/q_book_algebra.php?id=186). В 1936 году А. В. Михайловым был сформулирован следующий критерий устойчивости для [линейных систем](http://scask.ru/a_d_23.php) любого порядка.

Для устойчивости системы https://scask.ru/img_page/54.gif порядка необходимо и достаточно, чтобы [вектор](http://scask.ru/a_lect_math1.php?id=14) https://scask.ru/img_page/55.gif описывающий кривую Михайлова, при изменении https://scask.ru/img_page/56.gif от нуля до бесконечности имел угол поворота https://scask.ru/img_page/57.gif.

Эта формулировка непосредственно вытекает из (6.23). Для устойчивости системы необходимо, чтобы все корни лежали в левой [полуплоскости](http://scask.ru/g_book_dmath.php?id=236), т. е. должно быть https://scask.ru/img_page/58.gif Отсюда определяется требуемый результирующий угол поворота вектора.

Оказывается, что кривая Михайлова для устойчивых систем всегда имеет плавную спиралевидную форму, причем конец ее уходит в бесконечность в том квадранте [комплексной плоскости](http://scask.ru/c_book_agm.php?id=103), номер которого равен степени [характеристического уравнения](http://scask.ru/q_book_algebra.php?id=186) https://scask.ru/img_page/59.gif (рис. 6.8).

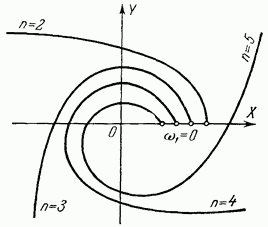


Рис. 6.8.

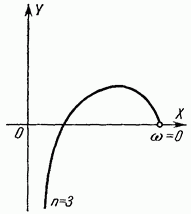


Рис. 6.9.

Число квадрантов, большее чем https://scask.ru/img_page/60.gif кривая Михайлова вообще не может пройти. Поэтому неустойчивость системы всегда связана с тем, что в кривой Михайлова нарушается последовательность прохождения квадрантов, вследствие чего угол поворота вектора https://scask.ru/img_page/61.gif оказывается меньшим чем https://scask.ru/img_page/62.gif (рис. 6.9).

Сказанное выше позволяет сформулировать [критерий Михайлова](http://scask.ru/f_book_kiber2.php?id=1) в несколько измененном виде. Для устойчивой системы кривая Михайлова проходит последовательно https://scask.ru/img_page/63.gif квадрантов. Поэтому корни уравнений https://scask.ru/img_page/64.gif должны чередоваться. Так как кривая Михайлова всегда начинается с точки, расположенной на оси вещественных (рис. 6.8), где мнимая часть обращается в нуль: https://scask.ru/img_page/65.gif то при постепенном увеличении частоты от нуля до бесконечности должна обратиться в нуль сначала вещественная часть: https://scask.ru/img_page/66.gif затем мнимая: https://scask.ru/img_page/67.gif затем опять вещественная: https://scask.ru/img_page/68.gif причем https://scask.ru/img_page/69.gif

По кривой Михайлова можно судить о том, сколько корней с положительными вещественными частями содержит [характеристическое уравнение](http://scask.ru/q_book_algebra.php?id=186) данной неустойчивой системы. Для нахождения искомого числа I должна использоваться зависимость (6.23). Если известны результирующий угол поворота вектора https://scask.ru/img_page/70.gif и степень характеристического уравнения https://scask.ru/img_page/71.gif то в уравнении (6.23) неизвестным будет только I.

При подсчете результирующего угла поворота https://scask.ru/img_page/72.gif следует иметь в виду, что при четной степени уравнения кривая Михайлова стремится к бесконечности

параллельно оси X и при нечетной степени — параллельно оси У. Это видно из выражений (6.18) и (6.19), так как при четной степени наивысшая степень https://scask.ru/img_page/73.gif будет стоять в выражении X, а при нечетной — в выражении У.

Так, например, для кривой, показанной на рис. 6.9 и соответствующей https://scask.ru/img_page/74.gif результирующий угол поворота

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_32.files/image14.gif

Отсюда имеем

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_32.files/image15.gif

и число корней в правой [полуплоскости](http://scask.ru/g_book_dmath.php?id=236) https://scask.ru/img_page/75.gif

Наличие границы устойчивости всех трех типов может быть определено по кривой Михайлова следующим образом.

В случае границы устойчивости первого типа (нулевой корень) отсутствует свободный член характеристического полинома https://scask.ru/img_page/76.gif и кривая Михайлова идет из начала координат (рис. 6.10, а).

При границе устойчивости второго типа (колебательная граница устойчивости) левая часть [характеристического уравнения](http://scask.ru/q_book_algebra.php?id=186), т. е. характеристический полином, обращается в нуль при подстановке https://scask.ru/img_page/77.gif

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_32.files/image16.gif

откуда вытекают два равенства:

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_32.files/image17.gif

Это значит, что точка https://scask.ru/img_page/78.gif на кривой Михайлова попадает в начало координат (рис. 6.10, б).

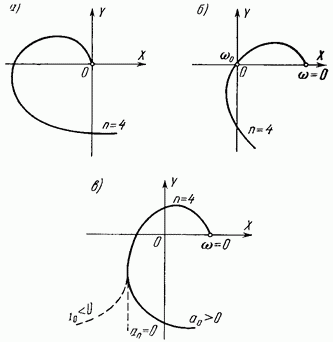


Рис. 6.10.

При этом величина https://scask.ru/img_page/79.gif есть частота [незатухающих колебаний](http://scask.ru/a_book_phis_t3.php?id=31) системы.

Для границы устойчивости третьего типа (бесконечный корень) конец кривой Михайлова перебрасывается, как показано на рис. 6.10, в. При этом коэффициент https://scask.ru/img_page/80.gif характеристического полинома (6.16) будет проходить через нулевое значение, меняя знак плюс на минус.

Необходимо помнить, что все остальные корни [характеристического уравнения](http://scask.ru/q_book_algebra.php?id=186) должны иметь отрицательные вещественные части. Графически это выражается в том, что в первых двух случаях после малой деформации кривой Михайлова около начала координат (рис. 6.10), а в третьем случае при малом https://scask.ru/img_page/81.gif кривая Михайлова должна удовлетворять критерию устойчивости.

Применим [критерий Михайлова](http://scask.ru/f_book_kiber2.php?id=1) для определения устойчивости рассмотренной в предыдущем параграфе [следящей системы](http://scask.ru/f_book_kiber2.php?id=523) (рис. 6.4). Из полученного характеристического уравнения определяем характеристический полином

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_32.files/image19.gif

и характеристический комплекс

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_32.files/image20.gif

Вещественная и мнимая части:

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_32.files/image21.gif

Примерный вид кривой Михайлова для этого случая изображен на рис. 6.11.

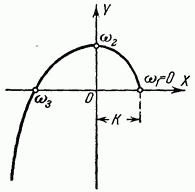


Рис. 6.11.

Найдем условие устойчивости из требования чередования корней https://scask.ru/img_page/82.gif Корень https://scask.ru/img_page/83.gif находится из уравнения https://scask.ru/img_page/84.gif

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_32.files/image23.gif

Отсюда имеем первое условие устойчивости https://scask.ru/img_page/85.gif Корень https://scask.ru/img_page/86.gif находится из уравнения https://scask.ru/img_page/87.gif

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_32.files/image24.gif

Подставляя эти значения в требуемое условие https://scask.ru/img_page/88.gif получаем второе условие устойчивости системы

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_32.files/image25.gif

которое, конечно, совпадает с полученным ранее условием устойчивости по критерию Гурвица.